

積分計算

- 台形公式
- シンプソン $1/3$ 公式

数値積分

$$S = \int_a^b f(x)dx \text{ の近似解を求める。}$$

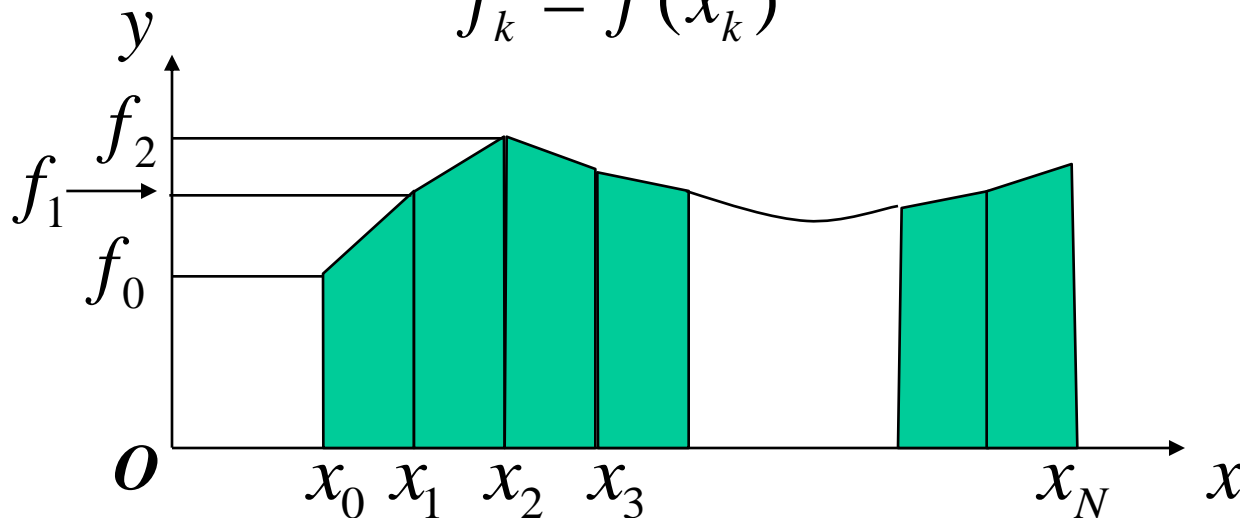
台形公式

積分区間 $[a, b]$ を N 等分する。

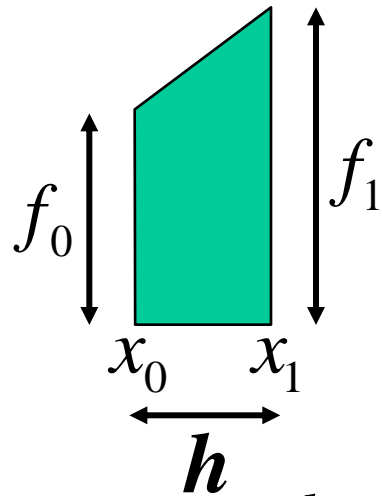
刻み幅 h

等分点 $x_k = a + k \cdot h$ $x_0 \equiv a, x_N \equiv b$

$$f_k = f(x_k)$$

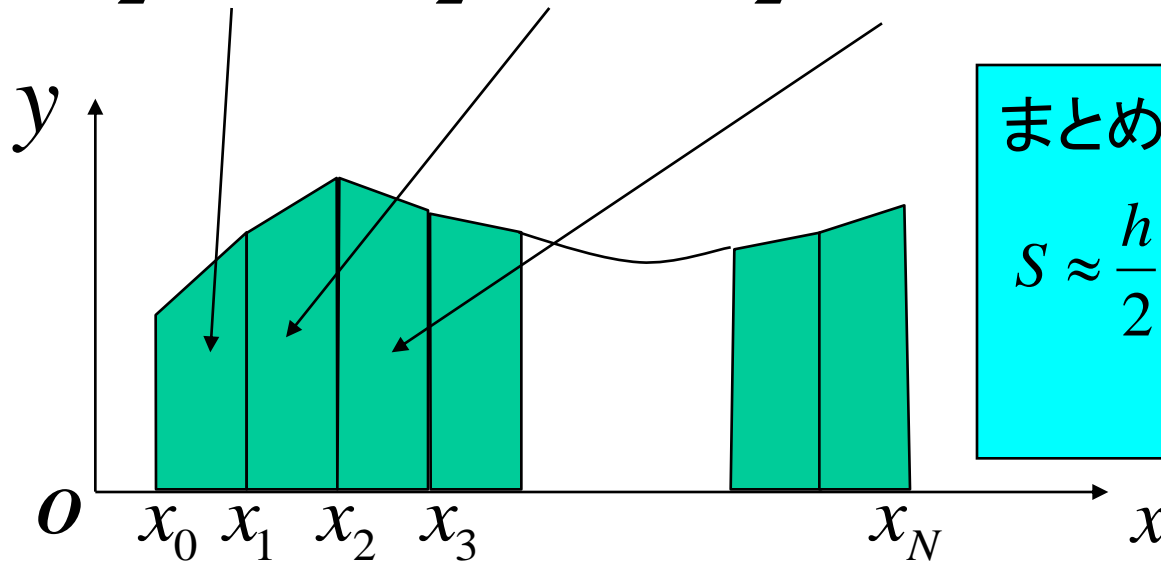


数値積分(2)台形公式つづき



$$\text{1つの台形の面積} = \frac{h}{2}(f_0 + f_1)$$

$$S \approx \frac{h}{2}(f_0 + f_1) + \frac{h}{2}(f_1 + f_2) + \frac{h}{2}(f_2 + f_3) + \cdots + \frac{h}{2}(f_{N-1} + f_N)$$

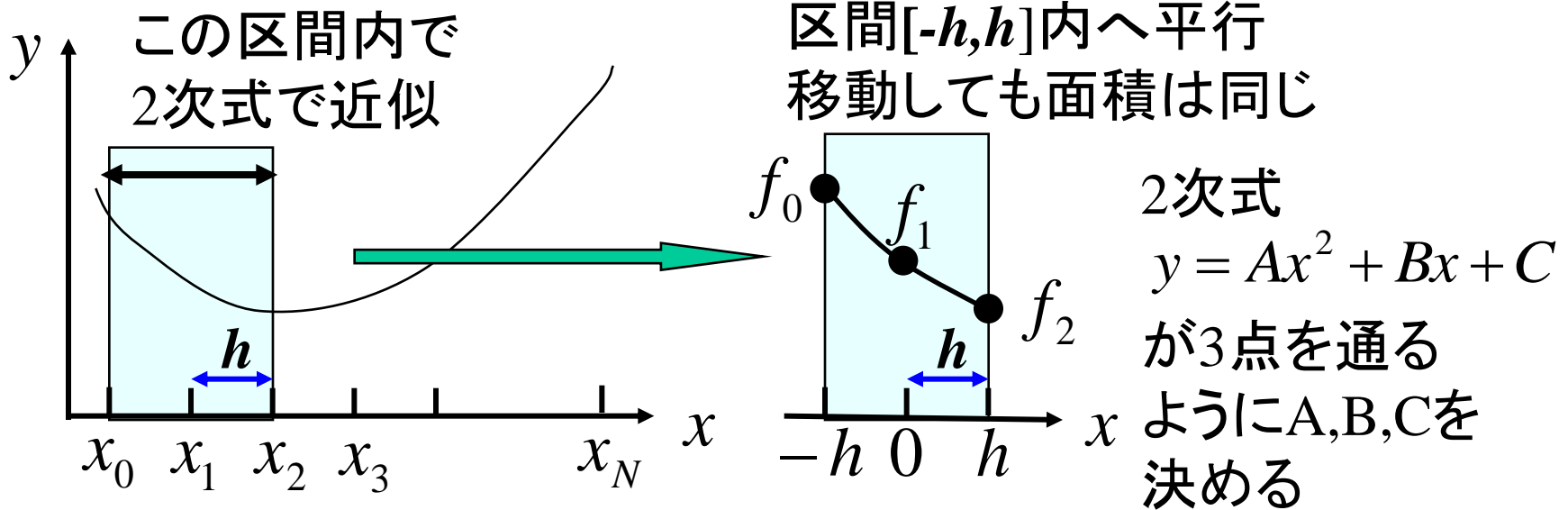


まとめると

$$S \approx \frac{h}{2}(f_0 + 2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + \cdots + 2f_{N-1} + f_N)$$

積分(3)シンプソンの公式

積分区間 $[a, b]$ を $N=2m$ 等分する



$$\begin{cases} x = -h & f_0 = Ah^2 - Bh + C \\ x = 0 & f_1 = C \\ x = +h & f_2 = Ah^2 + Bh + C \end{cases} \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} A = (f_0 - 2f_1 + f_2) / 2h^2 \\ B = (f_1 - f_0) / 2h \\ C = f_1 \end{cases}$$

積分(4)シンプソンの公式

区間 $[-h, h]$ で積分

$$\int_{-h}^h (Ax^2 + Bx + C) dx = 2Ah^3/3 + C2h = h(f_0 + 4f_1 + f_2)/3$$

各区間での積分を足し合わせて

$$\begin{aligned} S &= h(f_0 + 4f_1 + f_2)/3 \\ &\quad + h(f_2 + 4f_3 + f_4)/3h \\ &\quad \quad \quad + (f_4 + 4f_5 + f_6)/3 \\ &\quad \quad \quad \quad \quad \quad + \dots \end{aligned}$$



$$S = \frac{h}{3} (f_0 + 4f_1 + 2f_2 + 4f_3 + \dots + 2f_{N-2} + 4f_{N-1} + f_N)$$

関数積分のプログラム

分割数Nをキーボードから入力し、積分

$$S_1 = \int_0^1 \frac{4}{1+x^2} dx$$

の値を台形公式とシンプソンの公式により計算するプログラムを作成せよ。厳密値 π からの誤差も表示せよ。

ヒント：台形公式だけならこうなる。

```
implicit real*8 (a-h,o-z)
f(x)=4.0d0/(1.0+x*x)
pi=4.0*atan(1.0d0)
write(6,*) 'Enter n'
read(5,*) n
a=0.0d0
b=1.0d0
h=(b-a)/n
```

つづく

```
10 s=0.0d0
do 10 k=1, n-1
    s=s+f(a+h*k)
100 continue
S=(h/2.0d0)*(f(a)+f(b)+2.0*s)
write(6,100) s, s-pi
format( 2f14.7 )
end
```

関数積分のプログラム(2)

do 文で $T = f_1 + f_3 + \dots + f_{N-1}$ を求める。

do 文で $U = f_2 + f_4 + \dots + f_{N-2}$ を求める。

積分値(台形公式) $S = h(f_0 + f_N + 2T + 2U)/2$

積分値(シンプソン) $S = h(f_0 + f_N + 4T + 2U)/3$

ヒント

do 20 k=1,n-1,2

...

20 continue

```
implicit real*8 (a-h,o-z)
```

```
f(x)=4.0d0/(1.0+x*x)
```

```
pi=4.0*atan(1.0d0)
```

```
write(6,*) "Enter n"
```

```
read(5,*) n
```

```
a=0.0d0
```

```
b=1.0d0
```

```
h=(b-a)/n
```

```
t=0.0d0
```

```
u=0.0d0
```

10

20

つづく

```
do 10 k=1, n-1, 2
```

```
t=t+f(a+h*k)
```

```
continue
```

```
do 20 k=2, n-2, 2
```

```
u=u+f(a+h*k)
```

```
continue
```

```
s1=(h/2.0d0)*(f(a)+f(b)+2d0*t+2d0*u)
```

```
s2=(h/3.0d0)*(f(a)+f(b)+4d0*t+2d0*u)
```

```
write(6,*) s1, s2, s1-pi, s2-pi
```

```
end
```

関数積分のプログラム(3)

$$S = \int_0^1 4\sqrt{1-x^2} dx$$

についても計算してみよう!

```
implicit real*8 (a-h,o-z)
f(x)=4.0d0*sqrt(1-x*x)
pi=4.0*atan(1.0d0)
write(6,*) "Enter n"
read(5,*) n
a=0.0d0
b=1.0d0
h=(b-a)/n
t=0.0d0
u=0.0d0
```

つづく

```
do 10 k=1, n-1, 2
    t=t+f(a+h*k)
10 continue
do 20 k=2, n-2, 2
    u=u+f(a+h*k)
20 continue

s1=(h/2.0d0)*(f(a)+f(b)+2d0*t+2d0*u)
s2=(h/3.0d0)*(f(a)+f(b)+4d0*u+2d0*u)
write(6,100) s1, s2, s1-pi, s2-pi
end
```