

第2章 常微分方程式

この章では、物理の世界で頻繁に登場する常微分方程式を数値的に解く方法について考える。常微分方程式では

$$\frac{dy(t)}{dt} + f(y(t), t) = 0 \quad (2.1)$$

のように従属変数 (y) に対して独立変数 (t) が1つだけである。この例は t に関する1回微分だけが現れているので1次の常微分方程式である。

高次の常微分方程式は1次の常微分方程式の組み合わせで表現できることを見てみよう。2次の常微分方程式である減衰振動の式を例に考える。

$$m \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \eta \frac{dy(t)}{dt} + \kappa y(t) = 0 \quad (2.2)$$

ここで $v \equiv dy/dt$ を変数に導入すると、式 (2.2) を

$$\frac{dv(t)}{dt} + \frac{\eta}{m} v(t) + \frac{\kappa}{m} y(t) = 0, \quad \frac{dy(t)}{dt} - v(t) = 0 \quad (2.3)$$

という2つの連立1次常微分方程式に還元できる。同様にして n 次の常微分方程式は n 個の連立1次常微分方程式に還元することができ、結果は n 成分のベクトル $\mathbf{y} (= [y, dy/dt, d^2y/dt^2, \dots, d^{n-1}y/dt^{n-1}])$ と $\mathbf{f}$ を用いて次式のようにコンパクトに書ける。

$$\frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} + \mathbf{f}(\mathbf{y}(t), t) = 0 \quad (2.4)$$

式 (2.4) を形式的に $t_0 \rightarrow t$ まで積分すると

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{y}(t_0) - \int_{t_0}^t dt' \mathbf{f}(\mathbf{y}(t'), t') \quad (2.5)$$

を得るが、第2項目の積分を評価するためには区間 $[t_0, t]$ における $\mathbf{y}(t)$ の挙動を知る必要があるなのでこのままでは役に立たない。数値計算の出番である。

2.1 Euler 法

式 (2.5) 第2項の積分に対し数値計算での評価を試みる。微小区間 $\delta t = t_{n+1} - t_n$ に対して

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} dt' \mathbf{f}(\mathbf{y}(t'), t') \simeq \delta t \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_n), t_n) \quad (2.6)$$

と近似することにより

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) - \delta t \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_n), t_n) \quad (2.7)$$

なる漸化式を得る。式 (2.11) を何度も繰り返すことによって近似的に式 (2.5) を評価する、これが Euler 法である。式 (2.11) は元々の微分方程式 (2.4) に対して前進差分近似

$$\left. \frac{d\mathbf{y}(t)}{dt} \right|_{t=t_n} \simeq \frac{\mathbf{y}(t_{n+1}) - \mathbf{y}(t_n)}{\delta t} \quad (2.8)$$

を用いることと等価である。

2.1.1 Euler 法の精度

$\mathbf{y}(t)$ を $t = t_n$ の周りで δt について Taylor 展開すると

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + \delta t \left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_{t=t_n} + \frac{\delta t^2}{2} \left. \frac{d^2\mathbf{y}}{dt^2} \right|_{t=t_n} + \cdots \quad (2.9)$$

を得る。一方 Euler 法は

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) - \delta t \mathbf{f}(\mathbf{y}(t_n), t_n) = \mathbf{y}(t_n) + \delta t \left. \frac{d\mathbf{y}}{dt} \right|_{t=t_n} \quad (2.10)$$

であるので、(2.9) と比べると2次以上の項が無視されていることがわかる。よって Euler 法の精度は1次である。

2.1.2 Euler 法の安定性

$$\mathbf{y}(t_{n+1}) + \delta \mathbf{y}(t_{n+1}) = \mathbf{y}(t_n) + \delta \mathbf{y}(t_n) - \delta t (\mathbf{f}(\mathbf{y}(t_n), t_n) + \left. \frac{d\mathbf{f}}{d\mathbf{y}} \right|_{t=t_n} (\mathbf{y}(t_n), t_n)) \quad (2.11)$$

2.2 Leap-Frog 法

2.2.1 Leap-Frog 法の精度

2.2.2 Leap-Frog 法の安定性

2.3 Runge-Kutta 法

2.3.1 Runge-Kutta 法の精度

2.3.2 Runge-Kutta 法の安定性

2.3.3 4 次の Runge-Kutta 法

2.4 Predictor-Corrector 法

2.5 Symplectic 法

2.6 まとめと演習