3. 非圧縮性ナビエ・ストークス方程式

3-1. 流体の運動方程式

○ 質点の場合 $\xrightarrow[\text{運動量保存則}]{}$ ニュートンの運動方程式

○ 粘性流体の場合 $\xrightarrow[\text{運動量保存則}]{}$ ナビエ・ストークス方程式

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla p + \dfrac{\mu}{\rho}\nabla^2 \mathbf{u} & \cdots ① \\
\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \quad (\text{非圧縮条件}) & \cdots ②
\end{cases}
$$

・変数 $\underbrace{u_x, u_y, u_z}_{\text{流速ベクトル}}, \underbrace{p}_{\text{圧力}}$ の4つ。

・物質定数 ρ：密度，μ：粘性率

①,②の無次元化を考える。流れの代表的な長さをL
代表的な速度をUとして、

$$x = L\tilde{x}, \quad \mathbf{u} = U\tilde{\mathbf{u}}, \quad t = \frac{L}{U}\tilde{t}$$

$$p = \rho U^2 \tilde{p}, \quad \nabla = \frac{1}{L}\tilde{\nabla}$$

で無次元量 $\tilde{x}, \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{t}, \tilde{p}$ を定義する。

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u} = -\nabla p + \dfrac{1}{Re}\nabla^2 \mathbf{u} & ③ \\
\nabla\cdot\mathbf{u} = 0 & ④
\end{cases}
$$

(わずらわしいので~を消去した。)

ここで、 $Re = \dfrac{\rho U L}{\mu}$ は レイノルズ数 である。

3-2. MAC法

③を解いて求めた $\boldsymbol{u}$ が ④を満たす様に あらかじめ pを決めなければならない。

i) $\nabla\cdot$③ を考える

$\therefore \nabla\cdot(\nabla^2 \boldsymbol{u})$
$= \nabla\cdot\{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{u}) - \nabla\times\nabla\times\boldsymbol{u}\}$
$= \nabla^2(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$

$$\frac{\partial(\nabla\cdot\boldsymbol{u})}{\partial t} + \nabla\cdot\{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\} = -\nabla^2 p + \frac{1}{Re}\nabla^2(\nabla\cdot\boldsymbol{u})$$

ii) ここで $\nabla\cdot\boldsymbol{u} \equiv D$ とする。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \nabla\cdot\{(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}\} = -\nabla^2 p + \frac{1}{Re}\nabla^2 D$$

iii) $\dfrac{\partial D}{\partial t} = \dfrac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t}$ を用いて差分化すると、

$$\frac{D^{n+1} - D^n}{\Delta t} + \nabla\cdot\{(\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^n\} = -\nabla^2 p + \frac{1}{Re}\nabla^2 D^n$$

iv) ここで $D^{n+1} = 0$ とおくと、

$$\boxed{\nabla^2 p = -\nabla\cdot\{(\boldsymbol{u}^n\cdot\nabla)\boldsymbol{u}^n\} + \frac{D^n}{\Delta t}} + \frac{1}{Re}\nabla^2 D^n \qquad ⑤$$

このポアソン方程式を解いて求めた $p \equiv p^*$ を用いて⑥式を解くと、近似的にではあるが、 $D^{n+1} = \nabla\cdot\boldsymbol{u}^{n+1} \simeq 0$ が満たされる。

$\Delta t \ll 1$ なので、この項は前の項に較べて無視できる。

v). ③を $\dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \dfrac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^{n}}{\Delta t}$ を用いて差分化.

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^{n} + \Delta t \left[-(\mathbf{u}^{n} \cdot \nabla)\mathbf{u}^{n} - \nabla p^{*} + \frac{1}{Re}\nabla^{2}\mathbf{u}^{n} \right]. \quad ⑥$$

$\mathbf{u}^{n+1}$ が求まる. //

3-3 プロジェクション法.

i) ③を何も考えずに差分化する.

$$u^{n+1} = u^n + \Delta t\left[-(u^n\cdot\nabla)u^n - \nabla p^n + \frac{1}{Re}\nabla^2 u^n\right] \quad ⑦$$

ii) この様にして求めた $u^{n+1} = (u^{n+1})^0$ は $\nabla\cdot u$ を満たさないので. 次の反復操作を考える.

$$\begin{cases} (u^{n+1})^l = (u^{n+1})^0 - \Delta t\,\nabla p^l & ⑧ \\ p^{l+1} = p^l - \underbrace{\varepsilon}_{\text{緩和係数}}\nabla\cdot(u^{n+1})^l & ⑨ \end{cases}$$

⑨が収束すれば. $p^{l+1} - p^l = 0$ より.
$\nabla\cdot(u^{n+1})^l = 0$ が満たされる.

iii) ⑨が収束する条件.

⑧を⑨へ代入すると.

$$\frac{p^{l+1}-p^l}{\varepsilon} = \Delta t\,\nabla^2 p^l - \nabla\cdot(u^{n+1})^0 \quad ⑩$$

Δtを拡散係数,
εを仮想的な時間ステップとみなすと.拡散方程式のSimple法になっている.

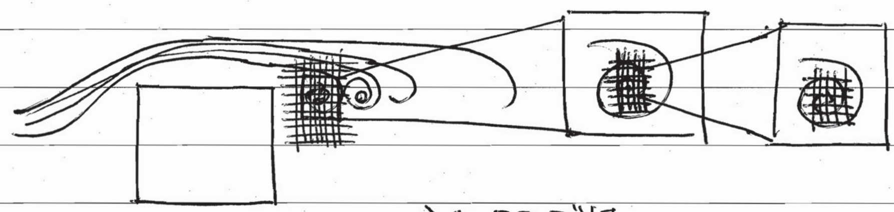
$\longrightarrow$ $\cancel{\varepsilon < \frac{\Delta t\,\varepsilon}{\Delta x^2}}$ であれば収束する.

$$\varepsilon \leq \frac{1}{2}\frac{\Delta x^2}{\Delta t}$$

3-4. 乱流の取り扱い ($Re \gg 1$)

ナビエ・ストークス方程式自体は乱流でも有効であるが、乱流では大小さまざまなスケールの渦が入り混じるので、最小スケールの渦まで解像できる様に細かい格子を用いる必要がある。

例)



現在のスーパーコンピュータを用いても（そのままでは）計算は不可能

⟶ 乱流を限られた格子で計算するために乱流モデルを用いる。

(小さなスケールの渦の影響を大きなスケールの流れに反映する方法)

3-4-1 レイノルズ方程式と渦粘性

次式で時間平均を定義する。

$$\bar{u} = \frac{1}{T}\int_t^{T+t} u\, dt \quad , \quad \bar{p} = \frac{1}{T}\int_t^{T+t} p\, dt$$

$$\underbrace{u}_{} = \underbrace{\bar{u}}_{\text{平均量}} + \underbrace{u'}_{\text{変動量}} \quad , \quad p = \bar{p} + p'$$

を ①.②に代入し平均をとると、

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + [(u+u')\cdot\nabla](u+u')$$
$$= \cancel{\frac{\partial u'}{\partial t}} + (u\cdot\nabla)u + \cancel{(u'\cdot\nabla)u} + \cancel{(u\cdot\nabla)u'} + (u'\cdot\nabla)u'$$
$$= (u\cdot\nabla)u + (u'\cdot\nabla)u'$$
$$+ u'\nabla\cdot u'$$

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial \overline{u'}}{\partial t} + [(\overline{u}+\overline{u'})\cdot\nabla](\overline{u}+\overline{u'}) = \boxed{(u\cdot\nabla)u + \nabla(u'u')}$$

$$= -\frac{1}{\rho}\nabla(\overline{p}+\cancel{\overline{p'}}) + \frac{\mu}{\rho}\nabla^2(\overline{u}+\cancel{\overline{u'}})$$

$$\begin{cases} \underbrace{\dfrac{\partial \overline{u}}{\partial t} + (\overline{u}\cdot\nabla)\overline{u} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla\overline{p} + \dfrac{\mu}{\rho}\nabla^2\overline{u}}_{\text{普通のナビエ・ストークス}} + \underbrace{\nabla\overline{u'u'}}_{\text{未知量（乱流の効果）}} & (11) \\ \nabla\cdot\overline{u} = 0 & (12) \end{cases}$$

(11)の未知量 $\overline{u'u'}$ について物理的考察をする.

乱流とは大小の渦が入り混じった流れ
→ 渦の混合により運動量の交換が行われる.
→ 流体要素間の速度差をならす働きをする.

" 乱流による渦の混合は、粘性と似た働きをする "

$$\therefore\ -\overline{u'u'} = \frac{\mu_t}{\rho}(\nabla u + \nabla u^T) - \frac{2}{3}k\,\mathrm{I}$$

渦粘性（モデルで与える）

$$\left(k \equiv \frac{1}{2}\overline{|u'|^2}\right) \qquad (13)$$

乱流エネルギー （非圧縮条件で決まる）

を仮定することができる.

ブッシネスクの渦粘性近似.

※ 渦粘性 μ_t を与えるモデルとして 混合距離モデル
k-ε（ケー・イプシロン）モデル
などがある.